ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THANH THỦY

PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH TRONG HÌNH HỌC SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THANH THỦY

PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH TRONG HÌNH HỌC SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

Mở đầu

Hình học là một trong những phân nhánh Toán học xuất hiện sớm nhất của nhân loại. Nhiệm vụ của hình học có thể được mô tả ngắn gọn là trả lời cho các câu hỏi về hình dạng, kích thước, vị trí tương đối của các hình khối, và các tính chất của không gian.

Các phương pháp giải toán trong hình học sơ cấp vốn vô cùng phong phú và đa dạng. Điều đó hoàn toàn dễ hiểu vì hình học là một môn học truyền thống trong nhà trường phổ thông và các trường đại học sư phạm. Dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ, tác giả luận văn này có mục đích trình bày về các phương pháp diện tích và thể tích trong hình học và những thảo luận về các bài thi học sinh giỏi, nhằm làm phong phú lý thuyết vừa trình bày và tạo cái nhìn đa chiều nhiều khía cạnh hơn cho giải toán hình học.

Ngoài các phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo, Chỉ mục, nội dung của luận văn được trình bày trong ba chương:

- *Chương 1. Phương pháp diện tích*. Chương này sẽ trình bày các kết quả về phương pháp diện tích và ứng dụng vào giải toán hình học sơ cấp. Các chủ đề sẽ được thảo luận là các Định lý Pythagore, Định lý Stewart, Ceva, Menelaus và Bất đẳng thức Erdös-Mordell cho đa giác.

- *Chương 2. Phương pháp thể tích*. Chương này dành để trình bày về phương pháp thể tích trong hình học, đặc biệt lưu ý đến thể tích qua định thức và một quan hệ liên quan đến bán kính của mặt cầu nội và ngoại tiếp.

- *Chương 3. Vận dụng giải bài thi học sinh giỏi*. Chương này sẽ trình bày lời giải của một số bài thi học sinh giỏi điển hình liên quan đến các phương pháp diện tích và thể tích của Chương 1 và Chương 2.

Tác giả hi vọng rằng, bản luận văn này có thể làm tài liệu tham khảo hữu ích cho những ai quan tâm đến Hình học sơ cấp và ứng dụng. Nó sẽ có ích trong việc bồi dưỡng giáo viên, các học sinh khá giỏi, và những ai quan tâm đến toán sơ cấp và muốn mở rộng nhãn quan nói chung.

Luận văn này đã được tác giả đầu tư nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ nhưng do nhiều lí do, luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong muốn sẽ nhận được nhiều đóng góp của các quý Thầy Cô, các anh chị em đồng nghiệp để luận văn này hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 5 năm 2017

Tác giả

Phạm Thị Thanh Thủy

Chương 1

Phương pháp diện tích

Hình học sơ cấp phát triển được là dựa trên nhiều kết quả của toán học cao cấp. Ví dụ đơn giản là để có thể đo độ dài một đoạn thẳng hay diện tích một hình vuông theo một đoạn thẳng được chọn làm đơn vị đo ta đã phải sử dụng kết quả về giới hạn, liên tục và tích phân xác định. Vấn đề lý giải quá trình hình thành kết quả nào đấy qua toán cao cấp là cần thiết và sẽ thường sử dụng tỷ số các đoạn thẳng hoặc diện tích trong chứng minh. Từ đó ta có thể phát hiện ra nhiều kết quả mới nữa.

1.1 Định lý Pythagore

1.1.1 Tam giác vuông

Dựa vào tiên đề số đo độ dài một đoạn thẳng và nhiều kết quả trong lý thuyết về giới hạn ta sẽ sử dụng mệnh đề dưới đây để tính diện tích một hình vuông cạnh a.

Mệnh đề 1.1.1. *Diện tích hình vuông $ABCD$ với độ dài cạnh $AB = a$ (đơn vị dài) đúng bằng a^2 đơn vị diện tích.*

Chứng minh. Dựng hệ tọa độ $Axy : A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$, $D(0,a)$. Khi đó

$$S_{ABCD} = \int_0^a a\,\mathrm{dx} = ax\Big|_0^a = a^2.$$

Như vậy, diện tích hình vuông $ABCD$ cạnh a đúng bằng a^2 đơn vị diện tích. □

Mệnh đề 1.1.2. *Tam giác vuông ABC có độ dài cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$ và $\angle BAC = 90^0$. Hạ đường cao $AH \perp BC$. Đặt $h = AH$ và diện tích tam giác qua S. Khi đó ta có các đồng nhất thức*

(1) $a^2 = b^2 + c^2$ [**Pythagore**].

(2) $b^2 = a.BH$ *và* $c^2 = a.CH$.

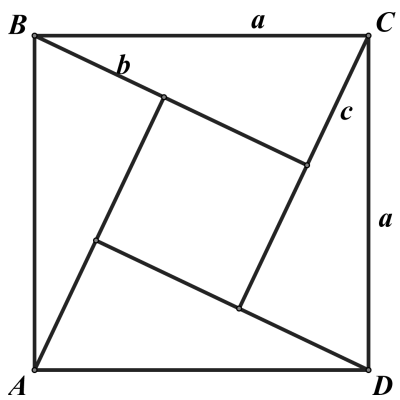
(3) $a.h = b.c, h^2 = BH.CH$ *và* $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

(4) $2S = a.h = b.c$.

Chứng minh. Dựng hình vuông $ABCD$ với cạnh $AB = a$. Dựng vào bên trong hình vuông $ABCD$ bốn tam giác vuông bằng nhau ABA_1, BCB_1, CDC_1 và DAD_1 bằng tam giác vuông ABA_1. Khi đó ta có hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ với $A_1B_1 = |b-c|$. Ta có S_{ABCD} bằng tổng diện tích bốn tam giác vuông ABA_1, BCB_1, CDC_1, DAD_1 và hình vuông $A_1B_1C_1D_1$. Vậy, ta có hệ thức

$$a^2 = 4.\frac{b.c}{2} + (b-c)^2 = b^2 + c^2.$$

Các kết quả còn lại là hiển nhiên. □



Hệ quả 1.1.1. *Với biểu diễn $b = a\sin B, c = a\cos B$ trong tam giác vuông ABC ta có*

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1.$$

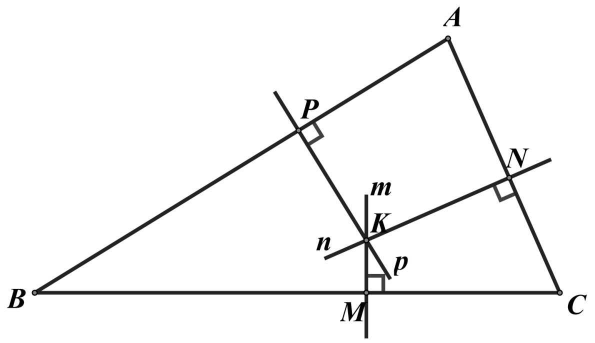
Chứng minh. Từ $a^2 = b^2 + c^2 = a^2(\sin^2 B + \cos^2 B)$ theo Định lý 1.1.2 ta nhận được hệ thức $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$. □

Hệ quả 1.1.2. *Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d và d'. Lấy A, B thuộc d và C, D thuôc d'. Khi đó $d \perp d'$ nếu và chỉ nếu $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.*

Chứng minh. Kết quả được suy ra từ Định lý Pythagore. □

Hệ quả 1.1.3 (Steiner)**.** *Cho tam giác ABC. Lấy M,N,P thuộc đường thẳng BC, CA, AB, tương ứng. Dựng đường thẳng $mM \perp BC$, $nN \perp CA$ và $pP \perp AB$. Ba đường thẳng mM, nN và pP đồng quy tại một điểm khi và chỉ khi*

$$MC^2 + NA^2 + PB^2 = MB^2 + PA^2 + NC^2.$$



Chứng minh. Kết quả được suy ra trực tiếp từ Định lý Pythagore. □

Ví dụ 1.1.1. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P là trung điểm các cạnh BC,CA, AB, tương ứng. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các hình vuông BCA_1A_2, CAB_1B_2, ABC_1C_2. Gọi A_0,B_0,C_0 là trung điểm A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2, tương ứng và dựng các đường thẳng $mM \perp B_0C_0$, $nN \perp C_0A_0$ và $pP \perp A_0B_0$. Chứng minh rằng, ba đường thẳng mM,nN,pP đồng quy tại một điểm.

Bài giải. Đặt $\alpha = \angle ABC_0$ và $a = BC, b = CA, c = AB$, $S = S_{ABC}$. Theo Định lý Côsin ta có $MC_0^2 = \dfrac{4c^2+b^2}{4} + 2S$ và $MB_0^2 = \dfrac{4b^2+c^2}{4} + 2S$. Ta nhận được

$$MB_0^2 - MC_0^2 = \frac{3}{4}(b^2 - c^2).$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có hai kết quả

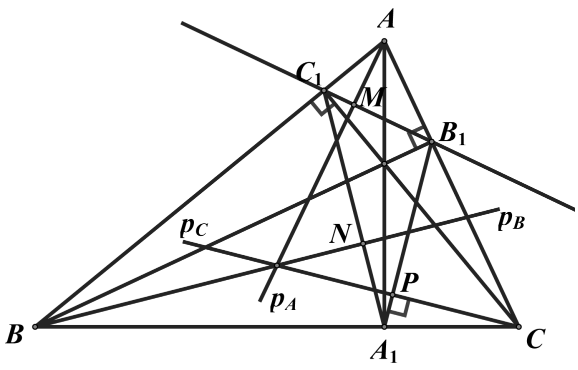
$$NC_0^2 - NA_0^2 = \frac{3}{4}(c^2 - a^2) \quad \text{và} \quad PA_0^2 - PB_0^2 = \frac{3}{4}(a^2 - b^2).$$

Ta có

$$MB_0^2 - MC_0^2 + NC_0^2 - NA_0^2 + PA_0^2 - PB_0^2 = 0.$$

Vậy, ba đường thẳng mM,nN,pP đồng quy tại một điểm theo hệ quả trên. □

Ví dụ 1.1.2. Cho tam giác ABC và các đường cao AA_1,BB_1,CC_1. Dựng các đường thẳng $AM \perp B_1C_1$, $BN \perp C_1A_1$ và $CP \perp A_1B_1$. Chứng minh AM,BN,CP đồng quy.



Bài giải. Ta có $MB_1^2 - MC_1^2 = AB_1^2 - AC_1^2 = (AB^2 - BB_1^2) - (AC^2 - CC_1^2)$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $NC_1^2 - NA_1^2$ và $PA_1^2 - PB_1^2$. Từ đó suy ra AM, BN, CP đồng quy theo ví dụ trên. □

Ví dụ 1.1.3. Tam giác ABC có $\angle A = 90^0$ và đường cao $AH = h$. Giả sử M là một điểm tùy ý trong tam giác và khoảng cách từ M đến BC, CA, AB là x, y, z. Xác định giá trị nhỏ nhất của tổng $T = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài giải. Hạ $MI \perp AH, I \in AH$. Vì $y^2 + z^2 = MA^2$ nên ta có thể đánh giá như sau:

$$T = MA^2 + x^2 \geqslant AI^2 + x^2 = (h-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2hx + h^2.$$

Vậy

$$T = 2\big(x - \frac{h}{2}\big)^2 + \frac{h^2}{2} \geqslant \frac{h^2}{2}$$

và $T_{nn} = \dfrac{h^2}{2}$ khi $x = \dfrac{h}{2}$ hay M là trung điểm đường cao AH. □

Ví dụ 1.1.4 (Bulgarian MO and TST 2013)**.** Cho tam giác nhọn ABC. Lấy các điểm M, N, P thuộc các cạnh BC, CA, AB, tương ứng, sao cho tam giác APN, BMP, CNM nhọn và ký hiệu H_a, H_b, H_c là trực tâm của chúng. Chứng minh rằng, nếu ba đường thẳng AH_a, BH_b, CH_c đồng quy thì ba đường thẳng MH_a, NH_b, PH_c cũng đồng quy.

Bài giải. Ký hiệu A_1, B_1, C_1 là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên NP, PM, MN, tương ứng. Vì đường thẳng AH_a, BH_b, CH_c đồng quy tại một điểm nên ta có hệ thức

$$(NC_1^2 - MC_1^2) + (MB_1^2 - PB_1^2) + (PA_1^2 - NA_1^2) = 0.$$

Vậy

$$0 = CN^2 - CM^2 + BM^2 - BP^2 + AP^2 - AN^2$$

$$= CN^2 - AN^2 + AP^2 - BP^2 + BM^2 - CM^2$$

Ta suy ra ba đường thẳng vuông góc hạ từ M,N,P xuống cạnh BC,CA,AB, tương ứng, đồng quy tại điểm K. Vì các tứ giác KMH_cN và KMH_bP là những hình bình hành nên tứ giác PH_bH_cN cũng là một hình bình hành. Khi đó hai đường chéo PH_c,NH_b cắt nhau tại điểm T, trung điểm mỗi đường. Tương tự, MH_a cũng nhận T làm trung điểm hay ba đường thẳng MH_a,NH_b,PH_c đồng quy tại điểm T. □

Ví dụ 1.1.5. Với hai số dương a, b xét $ABCD$ độ dài cạnh $AB = a+b$. Lấy M thuộc cạnh AB với $AM = a, BM = b$. Giả sử N chạy trên cạnh BC và P thuộc cạnh AD sao cho $NM \perp MP$. Xác định giá trị nhỏ nhất của tam giác MNP.

Bài giải. Đặt $x = BN$, $y = AP$. Từ điều kiện $MN \perp MP$ ta suy ra $MN^2 + MP^2 = NP^2$ và suy ra $xy = ab$. Khi đó $S_{MNP} = \dfrac{ax+by}{2} \geqslant \sqrt{abxy} = ab$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của S_{MNP} bằng ab khi $x = b, y = a$. □

Ví dụ 1.1.6. Coi bốn xã như bốn đỉnh hình vuông $ABCD$ với độ dài cạnh $AB = 10$ km. Chứng minh rằng, có thể xây mạng đường nối bốn xã với tổng độ dài nhỏ hơn 28 km.

Bài giải. Gọi O là tâm hình vuông. Lấy I,J là trung điểm đoạn AO,BO, tương ứng. Mạng đường nối bốn xã là AI,IJ,JB,ID,JC. Tổng độ dài mạng đường này bằng $d = 5+5\sqrt{2}+5\sqrt{10} < 28$, (đúng). □

1.1.2 Hệ tọa độ Descarte vuông góc

Trước khi trình bày hệ tọa độ Carte vuông góc chúng ta sẽ chứng minh lại Định lý Thales và nhắc lại khái niệm số đo đoạn thẳng. Giả sử ta chọn đoạn AB làm đơn vị đo. Theo tiên đề về số đo, ứng với mỗi đoạn thẳng MN luôn có một số thực x để $MN = |x|.AB$ và $\overline{MN} = x.\overline{AB}$. Từ đó ta định nghĩa tỷ số giữa hai đoạn thẳng: Giả sử $MN = |x|.AB$, $PQ = |y|.AB$ với $y \neq 0$. Tỷ số giữa hai đoạn được định nghĩa như sau:

$$\frac{MN}{PQ} := \frac{|x|}{|y|} \text{ và } \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} := \frac{x}{y}.$$

Định lí 1.1.1 (Thales's Theorem)**.** *Với hai đường thẳng d,d' và ba đường thẳng song song a,b,c cắt d,d' tại A,B,C và A',B',C', tương ứng, ta luôn có* $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.